第 3 节 求带参函数的单调区间、极值、最值（★★★）

内容提要

当函数解析式中有参数时，求函数的单调区间往往需要讨论，这类题函数可能千变万化，但本质上讨论的流程可归纳为如下的流程图：

$$f'(x)\to\begin{cases}\text{无零点}\\ \text{有零点}\begin{cases}\text{只有一个零点}\\ \text{有多个零点}\to\text{讨论零点的大小}\end{cases}\end{cases}$$

典型例题

类型Ⅰ：$f'(x)$最多一个零点

【例 1】设 $f(x)=\ln x-ax(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

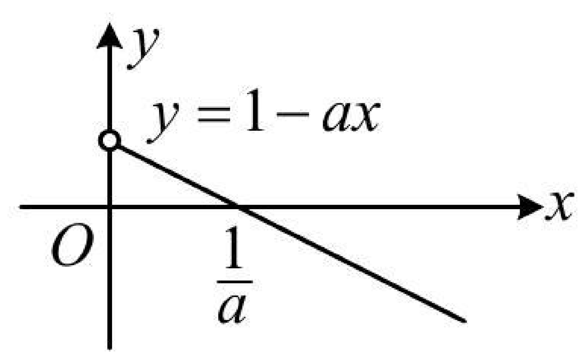
解：由题意，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}(x>0)$，

（$f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{a}(a\neq 0)$，$\dfrac{1}{a}$是否在$(0,+\infty)$上决定 $f'(x)$在定义域上是否有零点，故讨论 a 的正负）

①当 $a\le 0$ 时，$1-ax>0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$上单调递增；

②当 $a>0$ 时，如图，结合图象知 $f'(x)>0\Leftrightarrow 1-ax>0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{a}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减.



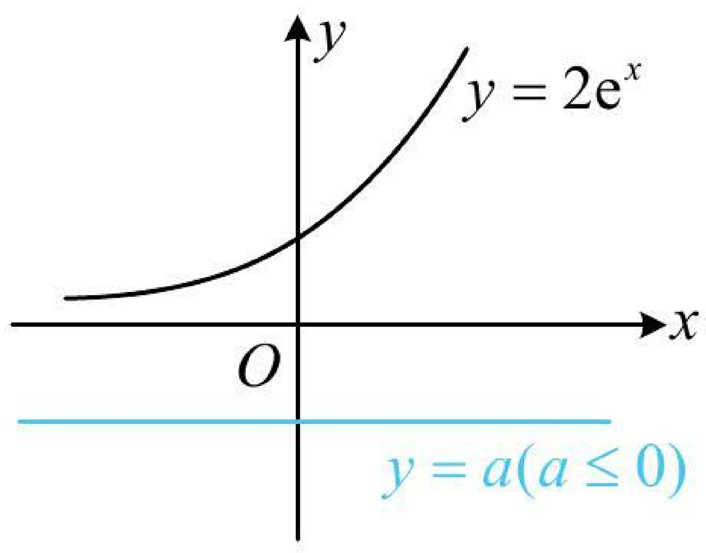
【变式 1】设 $f(x)=e^{2x}-(a-2)e^{x}-ax+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

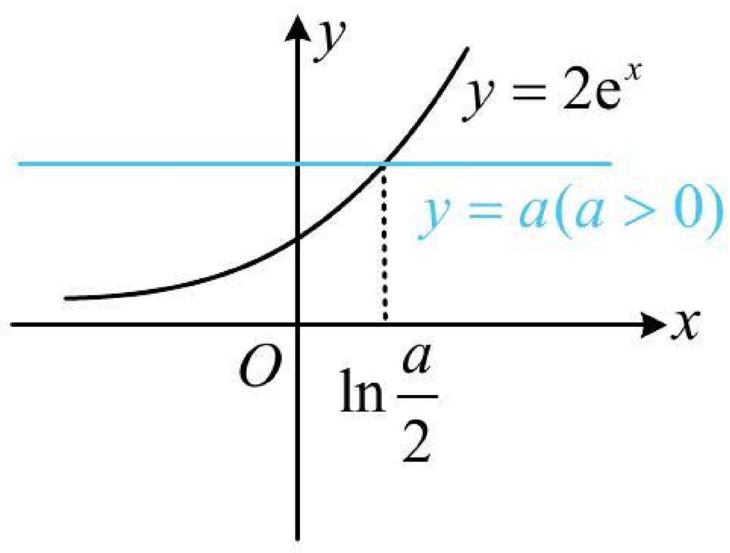
解：由题意，$f'(x)=2e^{2x}-(a-2)e^{x}-a=(2e^{x}-a)(e^{x}+1)$，（此处 $f'(x)$ 虽比例 1 复杂，但其符号与 $2e^{x}-a$ 这部分的符号相同，$2e^{x}-a=0\Leftrightarrow 2e^{x}=a$，如图，该因式是否有零点由 a 的正负决定，故据此讨论）

①当 $a\le 0$ 时，$2e^{x}-a>0$，$e^{x}+1>0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，$e^{x}+1>0$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x}-a>0\Leftrightarrow x>\ln\dfrac{a}{2}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 2e^{x}-a<0\Leftrightarrow x<\ln\dfrac{a}{2}$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln\dfrac{a}{2})$ 上单调递减，在 $(\ln\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增.





【变式 2】已知函数 $f(x)=ax-(a-1)\ln x+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：由题意，$f'(x)=a-\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{ax-a+1}{x}$，$x>0$，（$f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{a-1}{a}(a\neq 0)$，若导函数在定义域内有零点，则 $\dfrac{a-1}{a}>0$，故 $a<0$ 或 $a>1$，余下即为 $f'(x)$ 在定义域内没有零点的情形，讨论的标准就有了）

①当 $a<0$ 时，直线 $y=ax-a+1$ 如图 1，由图可知 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{a-1}{a}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x>\dfrac{a-1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-1}{a})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{a-1}{a},+\infty)$ 上单调递减；

②当 $a>1$ 时，直线 $y=ax-a+1$ 如图 2，由图可知 $f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{a-1}{a}$，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>\dfrac{a-1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{a-1}{a},+\infty)$ 上单调递增；

（余下的部分就是 $f'(x)$ 在定义域上无零点的情形，此时 $f'(x)$ 必定不变号）

③当 $0\le a\le 1$ 时，$ax\ge 0$，$-a+1\ge 0$，所以 $ax-a+1\ge 0$，从而 $f'(x)\ge 0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

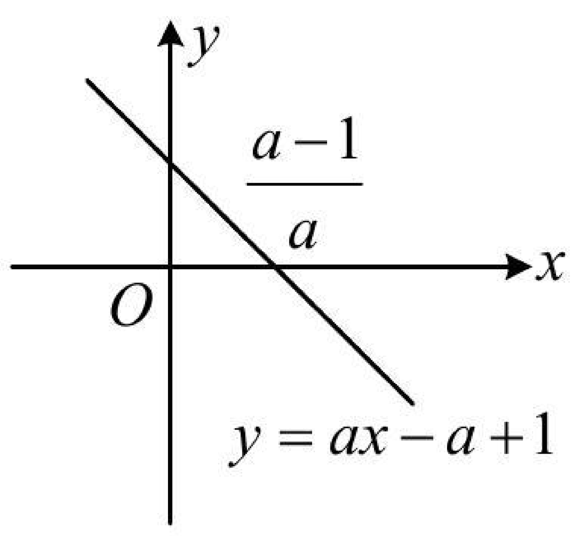


图1

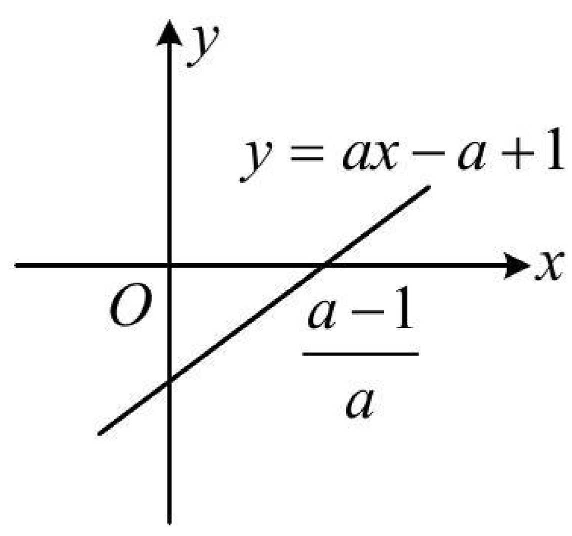


图2

【总结】从例 1 和上面的几个变式可以看出，当 $f'(x)$ 最多 1 个零点时，寻找讨论依据的方法是先令 $f'(x)=0$，求出 x，再看它在或不在定义域内.

类型Ⅱ：$f'(x)$ 多个零点的讨论

【例 2】已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2a-1}{2}x^2-2ax+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：由题意，$f'(x)=x^2+(2a-1)x-2a=(x+2a)(x-1)$，（$f'(x)$ 有 $-2a$ 和 1 这两个零点，但这两个零点的大小不定，所以讨论的依据是零点的大小）

①当 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时，$-2a>1$，$f'(x)$ 的草图如图 1，$f'(x)>0\Leftrightarrow x<1$ 或 $x>-2a$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 1<x<-2a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,-2a)$ 上单调递减，在 $(-2a,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=(x-1)^2\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

③当 $a>-\frac{1}{2}$ 时，$-2a<1$，$f'(x)$ 的草图如图 2，$f'(x)>0\Leftrightarrow x<-2a$ 或 $x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow -2a<x<1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2a)$ 上单调递增，在 $(-2a,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

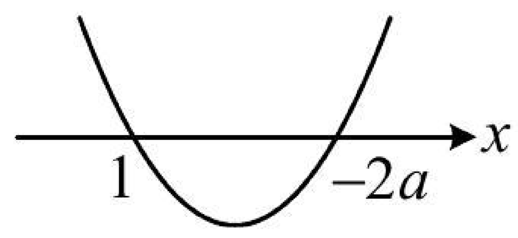


图1

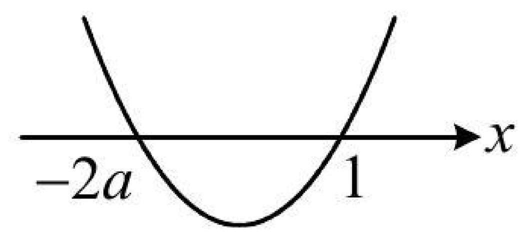


图2

【变式 1】（2021·全国乙卷节选）已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：由题意，$f'(x)=3x^2-2x+a$，（本题 $f'(x)$ 不易分解因式，$f'(x)$ 的零点个数由判别式 $\Delta=4-12a$ 的正负决定，故据此讨论，结合求根公式给出单调性）

①当 $a\geq\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)\geq 3x^2-2x+\frac{1}{3}=3(x-\frac{1}{3})^2\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

②当 $a<\frac{1}{3}$ 时，令 $f'(x)=0$ 可得 $x=\frac{1\pm\sqrt{1-3a}}{3}$，且 $f'(x)>0\Leftrightarrow x<\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}$ 或 $x>\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}$，

$f'(x)<0\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3})$ 上单调递增，

在 $(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3},\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3})$ 上单调递减，在 $(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3},+\infty)$ 上单调递增.

【变式 2】（2021·全国乙卷）设 $a\neq 0$，若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则（　　）

（A）$a<b$　　（B）$a>b$　　（C）$ab<a^2$　　（D）$ab>a^2$

解法 1：题干涉及极值点，可从 $f'(x)$ 的角度出发分析极值的情况，下面先求导，

由题意，$f'(x)=a[2(x-a)(x-b)+(x-a)^2]=a(x-a)(3x-a-2b)$，$f'(x)=0\Rightarrow x=a$ 或 $\frac{a+2b}{3}$，

因为 $f(x)$ 有极值，所以必有 $a\neq\frac{a+2b}{3}$，a 的正负影响二次函数开口，故要判断导函数的正负，得先讨论 a 的正负，再由 $x=a$ 是极大值点来判断 a 和 $\frac{a+2b}{3}$ 的大小，

当 $a>0$ 时，因为 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点，所以 $f'(x)$ 在 $x=a$ 附近应为左正右负，故 $f'(x)$ 的图象如图 1，由图可知 $a<\frac{a+2b}{3}$，故 $a<b$，两端同乘以 a 可得 $a^2<ab$；

当 $a<0$ 时，因为 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点，所以 $f'(x)$ 在 $x=a$ 附近应为左正右负，故 $f'(x)$ 的图象如图 2，由图可知 $a>\frac{a+2b}{3}$，故 $a>b$，两端同乘以 a 可得 $a^2<ab$；故选 D.

解法 2：注意到 $f(x)$ 有 a 和 b 两个零点，而 $x=a$ 也是 $f(x)$ 的极大值点，这些都是 $f(x)$ 图象上的关键特征，

据此已经能把 $f(x)$ 的大致图象画出来了，所以本题也可直接从 $f(x)$ 的图象出发考虑，a 的正负不同会导致图象的整体趋势不同，故讨论 a 的正负，

当 $a>0$ 时，$f(x)=0 \Rightarrow x=a$ 或 b，要使 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点，则 $f(x)$ 的大致图象如图 3，

由图可知 $a<b$，两端同乘以 a 可得 $a^2<ab$；

当 $a<0$ 时，$f(x)=0 \Rightarrow x=a$ 或 b，要使 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点，则 $f(x)$ 的大致图象如图 4，

由图可知 $a>b$，两端同乘以 a 可得 $a^2<ab$；故选 D.

答案：D

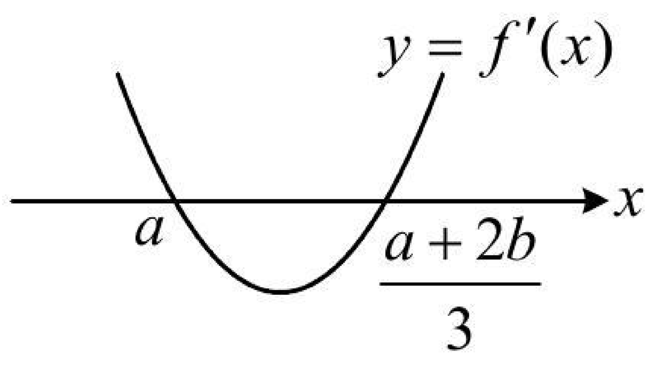


图1

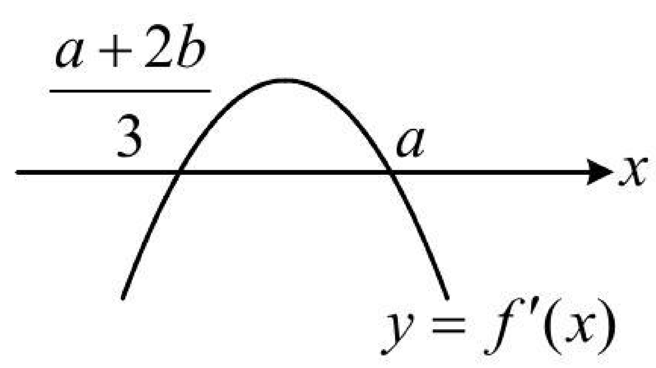


图2

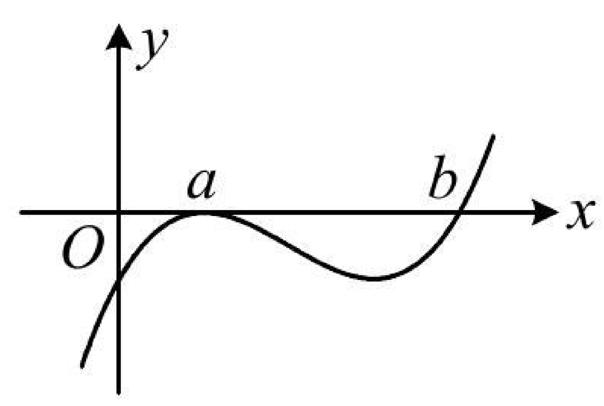


图3

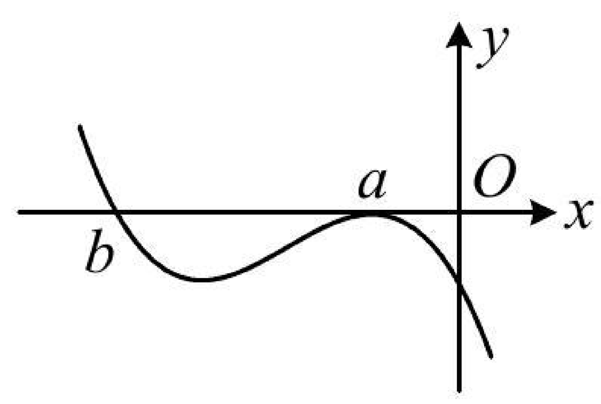


图4

【反思】数形结合是一种重要的思想方法，零点和极值点是三次函数图象上的关键信息，若能从题干分析出这些信息，往往可以结合图象来简化计算过程.

【例 3】（2021・新高考 II 卷节选）已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解：由题意，$f'(x)=xe^x-2ax=x(e^x-2a)$，（当 $a\le 0$ 时，因式 e^x-2a 无零点；当 $a>0$ 时，该因式有零点，所以按 a 的正负讨论）

①当 $a\le 0$ 时，$e^x-2a>0$，所以 $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$，$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 有零点 0 和 $\ln(2a)$，故讨论的逻辑是比较它们的大小，也即比较 a 与 $\frac{1}{2}$ 的大小）

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\ln(2a)<0$，（0 和 $\ln(2a)$ 又把实数集划分成三段，故分三段分别判断 $f'(x)$ 的正负）

若 $x<\ln(2a)$，则 $x<0$，$e^x-2a<e^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)>0$，

若 $\ln(2a)<x<0$，则 $e^x-2a>e^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)<0$，

若 $x>0$，则 $e^x-2a>1-2a>0$，所以 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2a))$ 上单调递增，在 $(\ln(2a),0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

③当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=x(e^x-1)$，若 $x<0$，则 $e^x-1<0$，所以 $f'(x)>0$，

若 $x>0$，则 $e^x-1>0$，所以 $f'(x)>0$，又 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)\ge 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

④当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$\ln(2a)>0$，若 $x<0$，则 $e^x-2a<1-2a<0$，所以 $f'(x)>0$，

若 $0<x<\ln(2a)$，则 $e^x-2a<e^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)<0$，

若 $x>\ln(2a)$，则 $x>0$， $e^x-2a>e^{\ln(2a)}-2a=0$，所以 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增.

【反思】当 $f'(x)$ 有多个因式时，可先看含参的因式在定义域上是否有零点，作为讨论的依据之一；有零点时，又要和其它因式的零点比较大小，细化讨论.

强化训练

1．（2022•四川模拟•★★）设 $f(x)=a\ln x-x+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

2．（★★）设 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+(2-a)e^x-2ax-1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

3．（2021•浙江卷节选•★★★）设 a，b 为实数，且 $a>1$，函数 $f(x)=a^x-bx+e^2(x\in\mathbf{R})$，求 $f(x)$ 的单调

4．（★★★）已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2-ax+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

5．（2022•郑州期末•★★★）已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-ax+a\ln x+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

6．（★★★）已知函数 $f(x)=(x-3)\mathrm{e}^{x}-ax^{2}+4ax+1(a\in\mathbf{R})$，讨论 $f(x)$ 的单调性.